MATURA ROZSZERZONA MAJ 2023

FORMUŁA 2015

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **E-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-**100**-2305

DATA: **12 maja 2023 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS TRWANIA: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

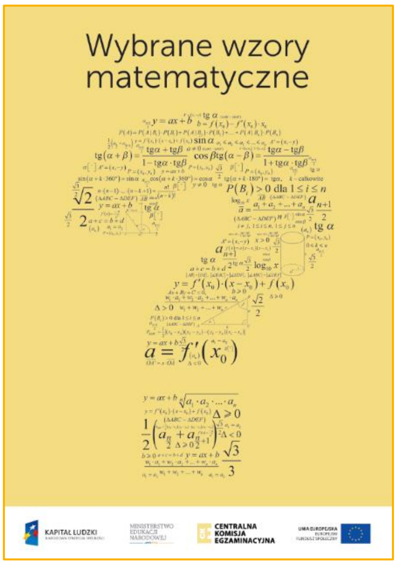
Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–16). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–16) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ jest równa

$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{3}{3} = 1.$

A. (-1) **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Zadanie 2. (0–1) ① $\vec{u}-4\vec{v} = [4;-5]-[-4;-20] = [8;15]$;

Dane są wektory $\vec{u} = [4,-5]$ oraz $\vec{v} = [-1,-5]$. Długość wektora $\vec{u} - 4\vec{v}$ jest równa

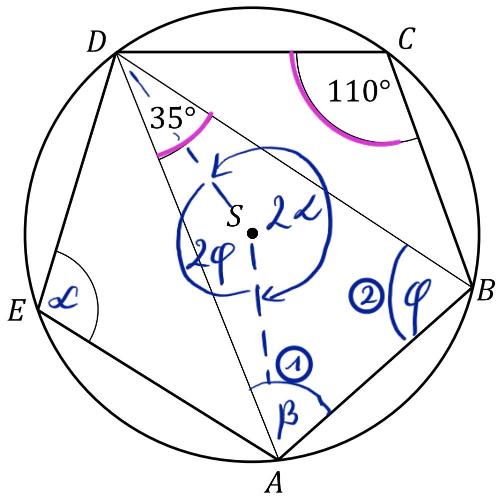
A. 7 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 23

$|\vec{u}-4\vec{v}| = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = 17$

Zadanie 3. (0–1)

Punkty A, B, C, D, E leżą na okręgu o środku S. Miara kąta BCD jest równa $110°$, a miara kąta BDA jest równa $35°$ (zobacz rysunek).

① CZWOROKĄT ABCD w „O"
$\beta + 110° = 180°$
$\beta = 70°$
② ΔABD: $\varphi = 180° - \beta - 35° = 75°$
③ $\overset{\frown}{AED}$: $2\varphi = 150°$
④ $2\alpha = 360° - 2\varphi$
$2\alpha = 210° \;/:2$
$\alpha = 105°$



Wtedy kąt DEA ma miarę równą

A. $100°$ **B.** $105°$ **C.** $110°$ **D.** $115°$

Zadanie 4. (0–1) $n = 13 \wedge k = 2$, KN, BP

Dany jest zbiór trzynastu liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$, z którego losujemy jednocześnie dwie liczby. Wszystkich różnych sposobów wylosowania z tego zbioru dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą, jest

A. $\binom{7}{2}+49$ **B.** $\binom{6}{1}\cdot\binom{7}{1}+49$ **C.** $\binom{13}{2}-\binom{7}{2}$ **D.** $\binom{13}{2}-\binom{6}{2}$

① $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{13}{2}$
② A' – iloczyn liczb nie jest parzysty (NP·NP)
③ $\overline{\overline{A'}} = \underbrace{\binom{7}{2}}_{NP\cdot NP}$
④ $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\Omega}} - \overline{\overline{A'}}$
$\overline{\overline{A}} = \binom{13}{2} - \binom{7}{2}$

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Oblicz ten pierwiastek.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

2	8	5

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

① $W(x_0)=0 \to x_0 \in W \overset{?}{=} \{\mp 1; \mp 2; \mp \frac{1}{7}; \mp \frac{2}{7}\}$

② $W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2$

	x^3			
	7	−9	9	−2
~~$x_0 = -\frac{2}{7}$~~	~~7~~	~~−11~~	~~$\frac{85}{7}$~~	~~≠0~~
$x_0 = \frac{2}{7}$	7	−7	7	0 → $(x-\frac{2}{7})$

$W(x) = (x - \frac{2}{7})(7x^2 - 7x + 7)$

$x_0 = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$

Zadanie 6. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \le xy^2 - y^3$. Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

Z: $x, y \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x+y=4 \\ x^3-x^2y \le xy^2-y^3 \end{cases}$

T: $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

D:

$x^3-x^2y \le xy^2-y^3$

$x^3-x^2y-xy^2+y^3 \le 0$

$x^2(x-y)-y^2(x-y) \le 0$

$(x-y)(x^2-y^2) \le 0$

$\underbrace{(x-y)^2}_{\ge 0} \cdot \underbrace{(x+y)}_{4} \le 0$

$\Downarrow$

$x-y=0 \quad \wedge \quad x+y=4$

$x=y \longrightarrow y+y=4$

$2y=4 \quad /:2$

$y=2$

$x=2 \longleftarrow y=2$

wyc:

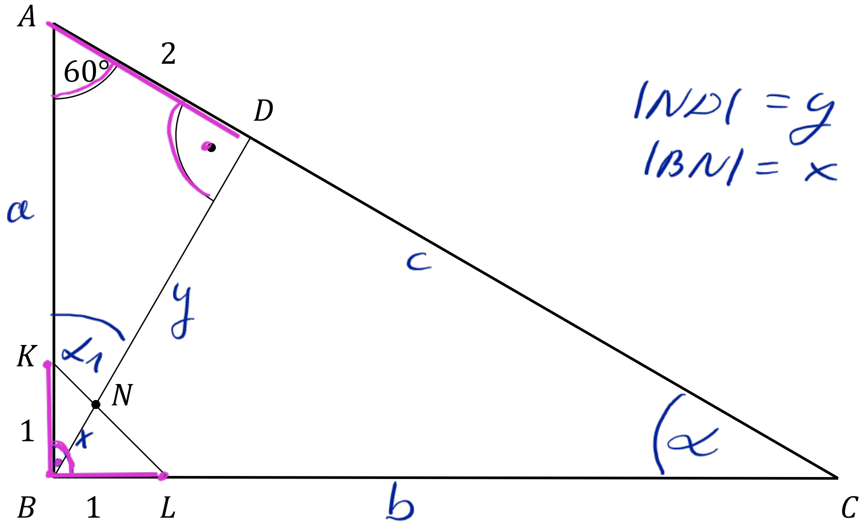
$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ cnd.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.

Z:



$|ND| = y$
$|BN| = x$

T: Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

D:

(1) $\Delta ABC: \alpha + 60° = 90° \rightarrow \underbrace{\alpha = 30°}$

$\Delta ABD: \alpha_1 + 60° = 90° \rightarrow \alpha_1 = \alpha$

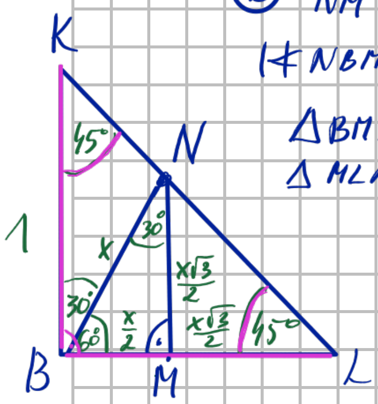
$\Delta ABD\ (30°, 60°, 90°) \rightarrow \underbrace{x + y = 2\sqrt{3}}$

(2) $\overline{NM} \perp \overline{BL} \rightarrow |BM| + |ML| = |BL| = 1$

$|\sphericalangle NBM| = 60° \wedge |\sphericalangle BNM| = 30° \wedge \alpha = 45°$

$\Delta BMN\ (30°, 60°, 90°) \Rightarrow |BM| = \frac{x}{2} \wedge |MN| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$\Delta MLN\ (45°, 45°, 90°) \Rightarrow |ML| = |MN| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$



$|BM| + |ML| = |BL|$

$\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 1 \quad / \cdot 2$

$x + x\sqrt{3} = 2$

$x(1 + \sqrt{3}) = 2 \quad / : (\sqrt{3} + 1)$

$\underbrace{x} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \underbrace{\sqrt{3} - 1}$

(3) $x + y = 2\sqrt{3}$

$y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$

$|ND| = y = \sqrt{3} + 1$ cnd.

I METODA

Zadanie 8. (0–3)

W pojemniku jest siedem kul: pięć kul białych i dwie kule czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.

I: $n = \underbrace{5}_{b} + \underbrace{2}_{cz} = 7$

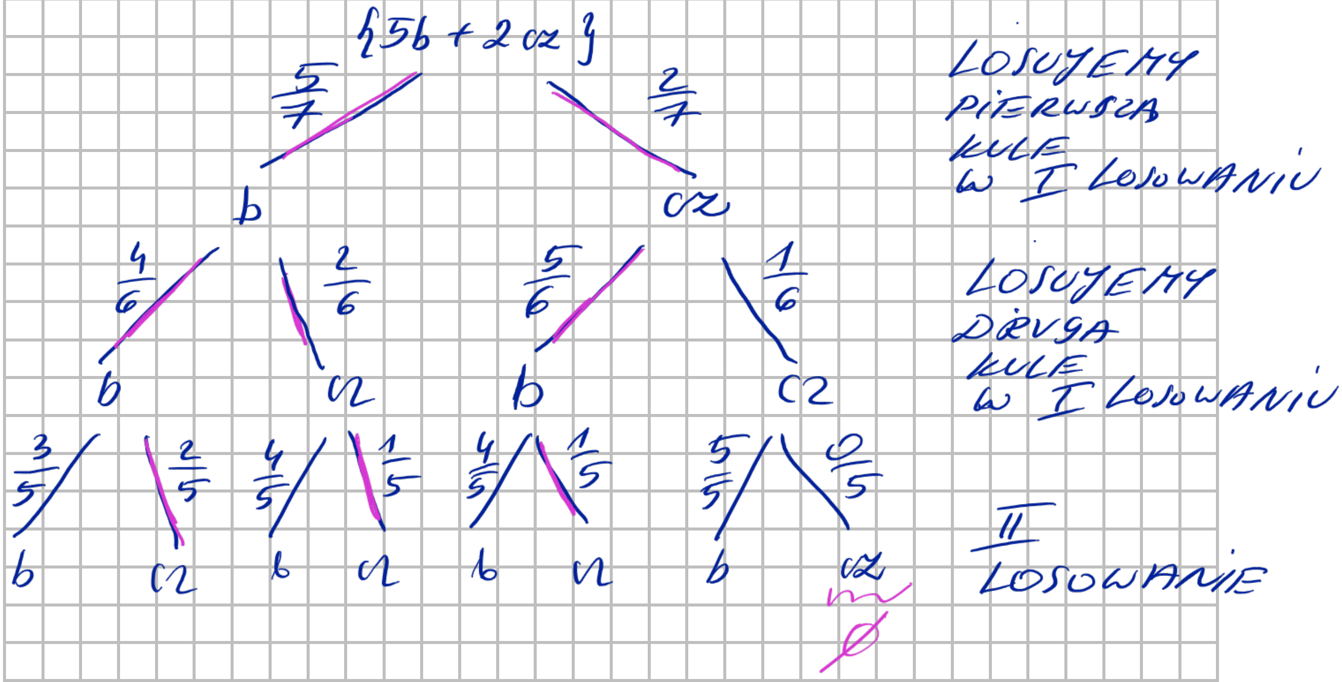
$k = 2$, KN, BP $\rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = C_n^k$

II: $n_1 = 5$ (ilość kul pozostałych)

$k_1 = 1 \rightarrow \overline{\overline{\Omega}}_1 = n_1$

A – w drugim (II) losowaniu wylosowano kulę czarną

$P(A) = ?$



$P(A) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} + \frac{\cancel{5}}{7} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} + \frac{\cancel{2}}{7} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}$

$= \frac{4}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Odp: $P(A) = \frac{2}{7}$

II METODA

Zadanie 8. (0–3)

W pojemniku jest siedem kul: pięć kul białych i dwie kule czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.

I: $n = \underbrace{5}_{b} + \underbrace{2}_{cz} = 7$

$k = 2$, KN, BP $\rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = C_n^k$

II $n_1 = 5$ (ilość kul pozostałych)

$k_1 = 1 \rightarrow \overline{\overline{\Omega}}_1 = n_1$

A – w drugim (II) losowaniu wylosowano kulę czarną

$P(A) = ?$

① $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \underbrace{21}$

C_x – wylosowano x kul czarnych w I losowaniu

$\overline{\overline{C_1}} = \binom{2}{1}\binom{5}{1} = 2 \cdot 5 = 10 \rightarrow P(C_1) = \frac{10}{21}$

$\overline{\overline{C_2}} = \binom{2}{2} = 1 \longrightarrow P(C_2) = \frac{1}{21}$

$\overline{\overline{C_0}} = \binom{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \rightarrow P(C_0) = \frac{10}{21}$

② A_x – wylosowanie kuli czarnej w II losowaniu, gdy w I losowaniu wybrano x czarnych

$\overline{\overline{\Omega}}_1 = 7 - 2 = 5$, $\overline{\overline{A_1}} = 1$, $\overline{\overline{A_2}} = 0$, $\overline{\overline{A_0}} = 2$

③

$P(A) = P(A_1|C_1) + P(A_2|C_2) + P(A_0|C_0)$

$= \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{21} + \frac{0}{5} \cdot \frac{1}{21} + \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{21} = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} = \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$

Odp.: $\underline{\underline{P(A) = \frac{2}{7}}}$

Zadanie 9. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f. Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

① $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$

② $P(x_0; 3) \in f(x) \longrightarrow f(x_0) = 3$

$x_0 = ?$

$s: y = ax + b$?

⑤ $s: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

② $\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8} = 3 \quad / \cdot (x^2+2x+8)$

$\cancel{3x^2} - 2x = \cancel{3x^2} + 6x + 24$

$-8 \cdot x = 24 \quad / : (-8)$

$x_0 = -3$ $\longrightarrow$ $P(-3; 3)$

① $x^2 + 2x + 8 \neq 0$

$(x+1)^2 + 7 \neq 0$

$D_f: x \in \mathbb{R}$

③ $f'(x) = \frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$

$= \frac{\cancel{6x^3} + 12x^2 + 48x - 2x^2 - \cancel{4x} - 16 - \cancel{6x^3} - 6x^2 + 4x^2 + \cancel{4x}}{(x^2+2x+8)^2}$

$= \frac{8x^2 + 48x - 16}{(x^2+2x+8)^2}$

④ $a = f'(-3) = \frac{8 \cdot 9 - 48 \cdot 3 - 16}{(9 - 6 + 8)^2} = \frac{-88}{11^2} = -\frac{8}{11}$

⑤ $s: y = -\frac{8}{11}(x+3) + 3$

$s: y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

Odp: STYCZNA DO $f(x)$ w $x_0 = -3$ ma postać $s: y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

① $\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2} \quad / \cdot 3$

$3|x+2| < 25 - 3|x-3|$

$|3x+6| + |3x-9| < 25$

	(1)	-2	(2)	3	(3)
$\|3x+6\|$	$-$		$+$		$+$
$\|3x-9\|$	$-$		$-$		$+$

(1) $x \in (-\infty; -2)$

$(3x+6) - (3x-9) < 25 \quad / \cdot (-1)$

$3x+6 + 3x - 9 > -25$

$6x > -22 \quad /: 6$

$x > -\frac{11}{3} \ \wedge\ (1) \longrightarrow \underline{x_1 \in \left(-3\tfrac{2}{3}; -2\right)}$

(2) $x \in \langle -2; 3)$

$3x+6 - (3x-9) < 25$

$15 < 25 \ \wedge\ (2) \longrightarrow \underline{x_2 \in \langle -2; 3)}$

(3) $3x+6+3x-9 < 25$

$6x < 28 \quad /: 6$

$x < \frac{14}{3} \ \wedge\ (3) \longrightarrow \underline{x_3 \in \langle 3; 4\tfrac{2}{3})}$

$x_1 \cup x_2 \cup x_3$: Odp: $\underline{\underline{x \in \left(-3\tfrac{2}{3}; 4\tfrac{2}{3}\right)}}$

Zadanie 11. (0–4)

Określamy kwadraty K_1, K_2, K_3, … następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

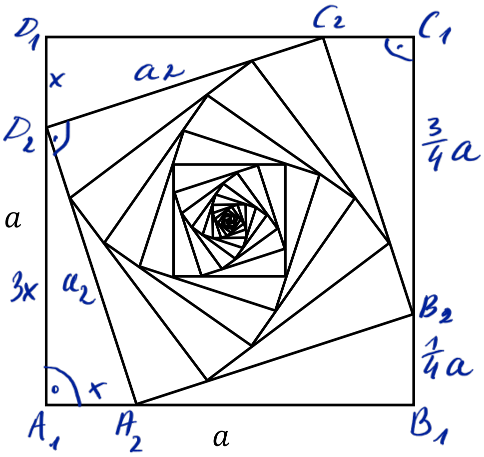
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.

$a_1 = |A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |A_1D_1|$

$a_1 = a$

S – suma obwodów wszystkich kwadratów

① $\frac{|D_1D_2|}{|D_2A_1|} = \frac{1}{3}$



$S = ?$

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu.

① $|D_1D_2| + |D_2A_1| = a$

$x + 3x = a$

$4x = a$

$|D_1D_2| = \frac{1}{4}a$

$|D_2A_1| = \frac{3}{4}a = |A_1A_2|$

② $\Delta A_1A_2D_2: \ |A_2D_2|^2 = |A_1D_2|^2 + |A_1A_2|^2$

$a_2^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$

$a_2^2 = \frac{10}{16}a^2 \quad /\sqrt{\ }, a_2 > 0$

$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

② L_n – obwód kwadratu o boku $a_n \wedge n \in \mathbb{N}^+$

$(L_n) = (4a_1, 4a_2; 4a_3; \dots) = (4a; \sqrt{10}a, \sqrt{10}^2 a; \sqrt{10}^3 a; \dots)$

$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{10}a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{4} = q \in (-1;1) \wedge L_1 = 4a$

③ $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{1} \cdot \frac{4}{4-\sqrt{10}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}$

$S = \frac{\cancel{16}^{8} a(4+\sqrt{10})}{\cancel{6}_{3}}$

Odp: $S = \frac{8}{3}(4+\sqrt{10}) \cdot a$

Zadanie 12. (0–4)

Rozwiąż równanie $3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$.

① $3\sin^2 x - (2\sin x \cdot \cos x)^2 = 0$

$3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x \cdot (3 - 4\cos^2 x) = 0 \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin^2 x = 0 \quad \vee \quad 3 - 4\cos^2 x = 0$

$-4\cos^2 x = -3 \quad /:(-4)$

$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \{\alpha_0 = \frac{\pi}{6}, \ T = \pi\}$

$x_1 = k\pi$

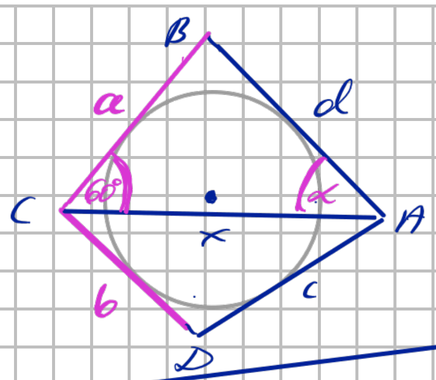
$x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

② dla $x \in \langle \pi ; 2\pi \rangle$:

Odp: $x \in \{\pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; 2\pi\}$

Zadanie 13. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



$|BC| = 4 = a$

$|CD| = 5 = b$

$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$L_{ABCD} = L$

$x = |AC|$

$L = ?$

① ΔABC – Tw. sin

$\frac{d}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \quad / \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$d = 4 \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$\underbrace{d = 8\sqrt{3}}$

② $\frac{1}{2}L = a + c = b + d \quad / \cdot 2$

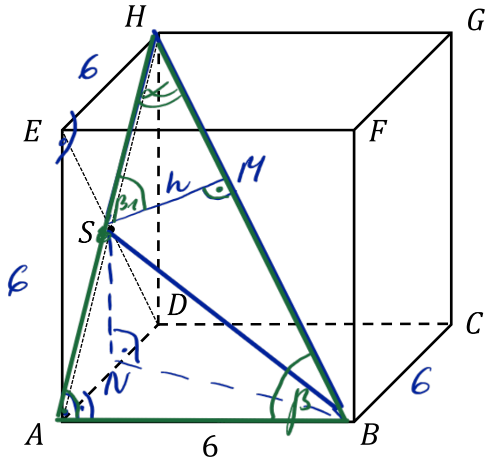
$L = 2(b + d)$

$L = 2(5 + 8\sqrt{3})$

$L = 10 + 16\sqrt{3}$

Zadanie 14. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



a – krawędź sześcianu

$a = 6$

Oznaczenia:

$\alpha = |\sphericalangle AHB|$

$\beta = |\sphericalangle ABH|$

$\beta_1 = |\sphericalangle HSM|$

$h = |SM| = ?$

Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta.

① $\Delta AHE\ (45°, 45°, 90°)$: $|AH| = 6\sqrt{2} \rightarrow \underline{|SH| = 3\sqrt{2}}$

② oraz $\underline{|HB| = 6\sqrt{3}} \rightarrow$ przekątna sześcianu

③ $\alpha + \beta = 90° \ \wedge \ \alpha_1 = \alpha$

$\Delta SMH \sim \Delta ABH$ (z w. kk $\Rightarrow \alpha, \beta$)

$\sin\alpha = \frac{h}{|SH|} = \frac{|AB|}{|HB|} \Rightarrow \frac{h}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}\sqrt{3}}$

$h = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Odp. $\underline{\underline{h = \sqrt{6}}}$

Zadanie 15. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0 \quad \Leftrightarrow f(x)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$.

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

① $x_1 \neq x_2 \longrightarrow \Delta > 0$

② $x_1^3 + x_2^3 > -28$

$m = ?$

① $\Delta > 0 \wedge m \neq 2$

$4^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{m-3}{m-2} > 0 \quad /:4$

$\frac{4(m-2)+(m-3)}{m-2} > 0$

$\frac{5m-11}{m-2} > 0$

$5(m-\frac{11}{5})(m-2) > 0$

$m_1 \in (-\infty; 2) \cup (2\frac{1}{5}; \infty)$

② $(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -28$

$(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2] > -28$

$(-4) \cdot [(-4)^2 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2}] > -28 \quad /:(-4)$

$\frac{16(m-2)+3(m-3)}{m-2} < 7$

$\frac{19m-41-7(m-2)}{m-2} < 0$

$\frac{12m-27}{m-2} < 0$

$12(m-\frac{9}{4})(m-2) < 0$

$m_2 \in (2; 2\frac{1}{4})$

③ $m_1 \cap m_2$:

Odp: $m \in (2\frac{1}{5}; 2\frac{1}{4})$

Zadanie 16. (0–7)

Rozważamy trójkąty ABC, w których $A = (0, 0)$, $B = (m, 0)$, gdzie $m \in (4, +\infty)$, a wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -2x$. Na boku BC tego trójkąta leży punkt $D = (3, 2)$.

a) Wykaż, że dla $m \in (4, +\infty)$ pole P trójkąta ABC, jako funkcja zmiennej m, wyraża się wzorem

$$P(m) = \frac{m^2}{m-4}$$

b) Oblicz tę wartość m, dla której funkcja P osiąga wartość najmniejszą. Wyznacz równanie prostej BC, przy której funkcja P osiąga tę najmniejszą wartość.

Z: $A(0,0)$

$B(m;0) \wedge m \in (4;\infty)$

$D(3;2) \in \overline{BC}$

$C(x_c; y_c) \in l$ $\Big\} \to C(x_c; -2x_c)$ (1)

$l: y = -2x$

$P_{ABC} = P(m)$

b) $P(m) = NM \wedge B, C \in k$

a) T: $P(m) = \frac{m^2}{m-4}$

b) $m = ?$

$k: y = ax + b$?

D: (1) dla $x_C = x$

$C(x; -2x)$

(2) $B, D \in k$

$D: \begin{cases} 3a_1 + b_1 = 2 \\ B: m a_1 + b_1 = 0 \end{cases}$

$(3-m)a_1 = 2 \quad /:(3-m)$

$a_1 = \frac{2}{3-m} \longrightarrow b_1 = \frac{2m}{m-3}$

$k: y = \frac{2}{3-m}x + \frac{2m}{m-3}$

(3) $C \in k$:

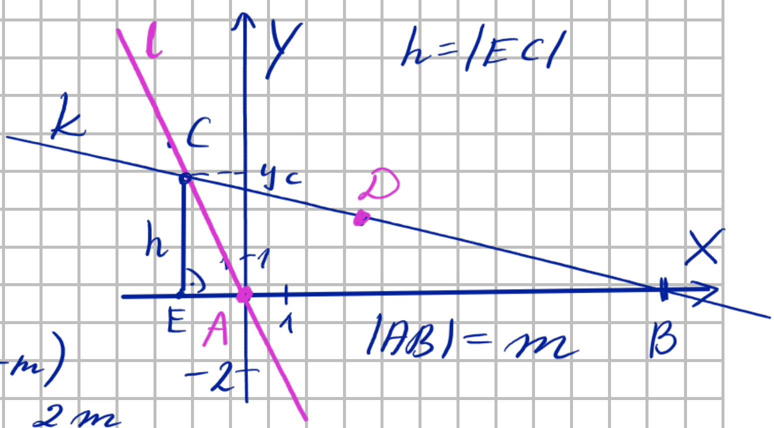
$-2x = \frac{2x}{3-m} - \frac{2m}{3-m} \quad /\cdot(3-m)$

$-6x + 2mx = 2x - 2m$

$x(2m-8) = -2m \quad /:(m-8) \neq 0$

$x = \frac{-2m}{-2(4-m)} = \frac{m}{4-m}$

$C\left(\frac{m}{4-m}; \frac{2m}{m-4}\right)$



$h = |EC|$

$|AB| = m$

(4) $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CE|$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot m \cdot \frac{\cancel{2}m}{m-4}$

$P(m) = \frac{m^2}{m-4}$

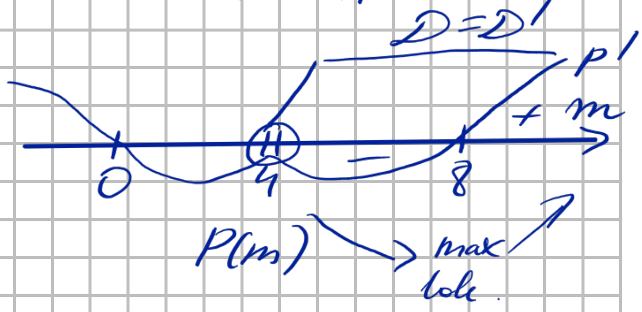
cnd

Ad. b)

(5) $P(m)=\frac{m^2}{m-4} \quad \wedge \quad D: p\in(4;\infty)$

$p'(m)=\frac{2m(m-4)-m^2\cdot 1}{(m-4)^2}=\frac{m(m-8)}{(m-4)^2}$

(6) WK i WW:



$p'(m)=0$ dla $m=8$

$P\searrow$ dla $m\in(4;8\rangle$

$f\nearrow$ dla $m\in\langle 8;\infty)$

dla $m=8$ funkcja $P(m)$ osiąga minimum, które jest najmniejszą wartością

$m=8$ $\Leftarrow$

(7) $k: y=\frac{2}{3-m}x+\frac{2m}{m-3}$

$k: y=\frac{2}{-5}x+\frac{16}{5} \quad \wedge \quad k=l_{BC}$

Odp: Pole trójkąta ABC jest najmniejsze dla $m=8$.

Prosta BC ma wzór: $y=-\frac{2}{5}x+\frac{16}{5}$

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015