MATURA PODSTAWOWA MAJ 2023

FORMUŁA 2015

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza
EMAP-P0-100-2305

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

DATA: **8 maja 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

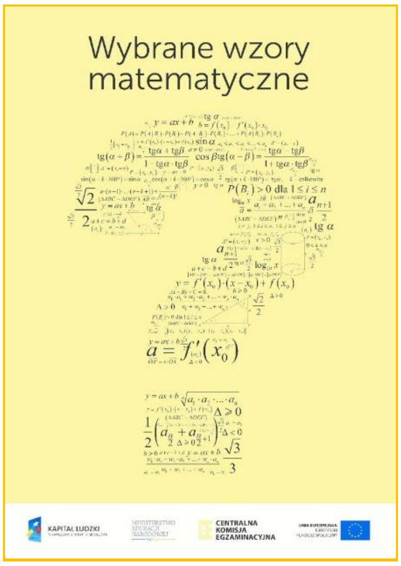
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–36). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–29) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (30–36) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
10. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

PEŁNE OBLICZENIA -> PATRZ FORMUŁA 2023

W każdym z zadań od 1. do 29. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\log_9 27 + \log_9 3$ jest równa

A. 81 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 2

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\left(-\frac{3}{2}\right)$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\left(-\frac{2}{3}\right)$

Zadanie 3. (0–1) x – cena początkowa

Cenę aparatu fotograficznego obniżono o 15%, a następnie – o 20% w odniesieniu do ceny obowiązującej w danym momencie. Po tych dwóch obniżkach aparat kosztuje 340 zł. Przed obiema obniżkami cena tego aparatu była równa

A. 500 zł **B.** 425 zł **C.** 400 zł **D.** 375 zł

① $x - 15\% x = 0{,}85x$

② $0{,}85x - 20\% \cdot 0{,}85x = 0{,}8 \cdot 0{,}85x = 0{,}68x$

③ $0{,}68x = 340 \quad / : 0{,}68$

$x = 500$

Zadanie 4. (0–1)

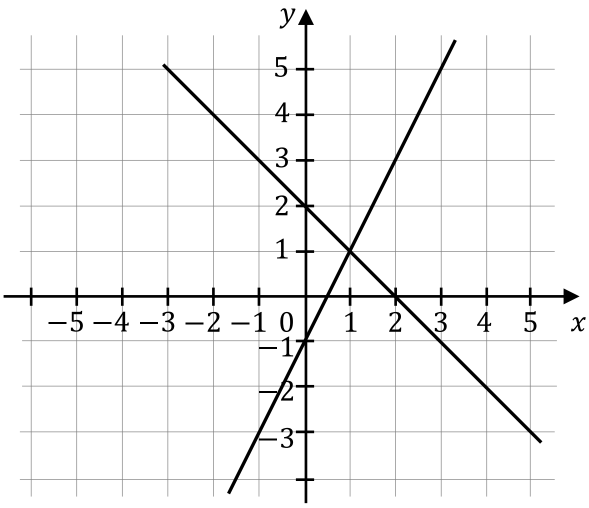
Dla każdej liczby rzeczywistej a wyrażenie $(2a-3)^2 - (2a+3)^2$ jest równe

A. $-24a$ **B.** 0 **C.** 18 **D.** $16a^2 - 24a$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–1)

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną jednego z niżej zapisanych układów równań.



Wskaż ten układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.

A. $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Zadanie 6. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$-2(x+3) \leq \frac{2-x}{3}$$

jest przedział

A. $(-\infty, -4\rangle$ **B.** $(-\infty, 4\rangle$ **C.** $\langle -4, \infty)$ **D.** $\langle 4, \infty)$

Zadanie 7. (0–1)

Jednym z rozwiązań równania $\sqrt{3}(x^2-2)(x+3) = 0$ jest liczba

A. 3 **B.** 2 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 8. (0–1)

Równanie $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: -1.

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: 1.

D. ma dokładnie dwa rozwiązania: -1 oraz 1.

Zadanie 9. (0–1)

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = (2p-1)x + p$ jest liczba (-4). Wtedy

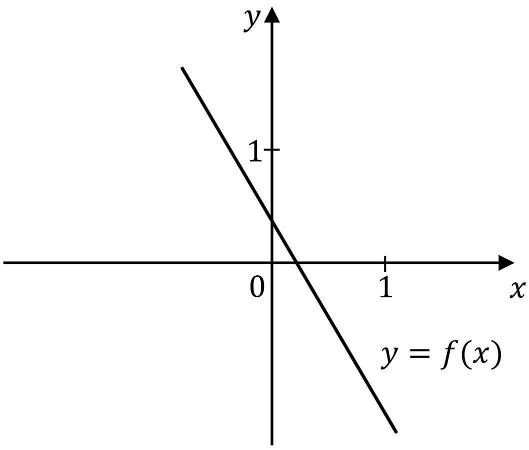
A. $p = \frac{4}{9}$ **B.** $p = \frac{4}{7}$ **C.** $p = -4$ **D.** $p = -\frac{4}{7}$

$f(-4) = 0 \Rightarrow -4(2p-1) + p = 0 \Rightarrow -7p = -4 \quad /:(-7)$

$\underline{p = \frac{4}{7}}$

Zadanie 10. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji f w układzie współrzędnych (x, y).



Liczba a oraz liczba b we wzorze funkcji f spełniają warunki:

A. $a > 0$ i $b > 0$.

B. $a > 0$ i $b < 0$.

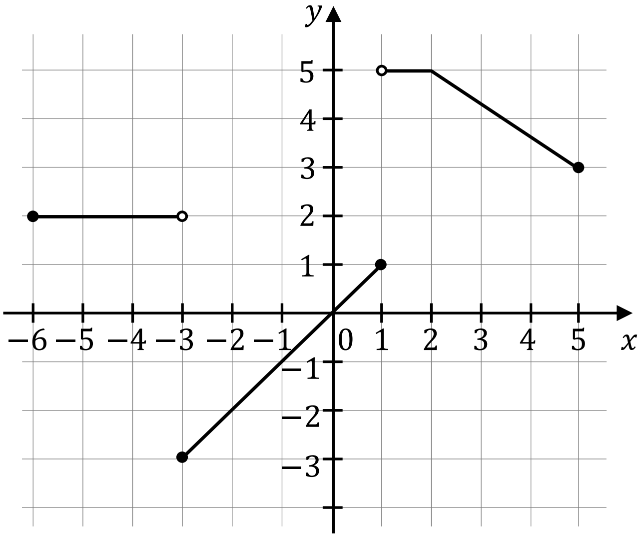
C. $a < 0$ i $b > 0$.

D. $a < 0$ i $b < 0$.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Informacja do zadań 11.–13.

W układzie współrzędnych (x, y) narysowano wykres funkcji $y = f(x)$ (zobacz rysunek).



Zadanie 11. (0–1)

Dziedziną funkcji f jest zbiór

A. $\langle -6, 5\rangle$ **B.** $(-6, 5)$ **C.** $(-3, 5\rangle$ **D.** $\langle -3, 5\rangle$

Zadanie 12. (0–1)

Funkcja f jest malejąca w zbiorze

A. $\langle -6, -3)$ **B.** $\langle -3, 1\rangle$ **C.** $(1, 2\rangle$ **D.** $\langle 2, 5\rangle$

Zadanie 13. (0–1)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -4, 1\rangle$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 5

Zadanie 14. (0–1)

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba (-5). Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f, jest równa 3.
Drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba

A. 11 **B.** 1 **C.** (-1) **D.** (-13)

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

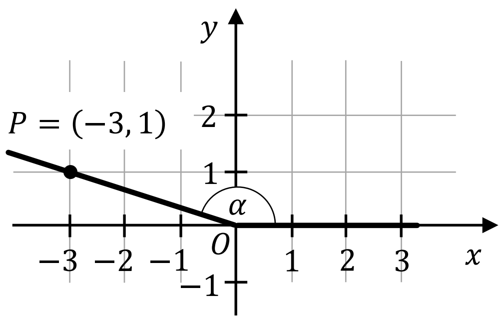
Zadanie 15. (0–1)
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n \cdot (n+1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Wyraz a_4 jest równy

A. 64 **B.** 40 **C.** 48 **D.** 80

Zadanie 16. (0–1)
Trzywyrazowy ciąg $(27, \ 9, \ a-1)$ jest geometryczny.
Liczba a jest równa

A. 3 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 2

Zadanie 17. (0–1)
W układzie współrzędnych zaznaczono kąt α o wierzchołku w punkcie $O = (0,0)$. Jedno z ramion tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią Ox, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-3,1)$ (zobacz rysunek).



Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **B.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{1}\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{3}\right)$

Zadanie 18. (0–1)
Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ jest równe

A. $\sin^2 \alpha$

B. $\sin^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

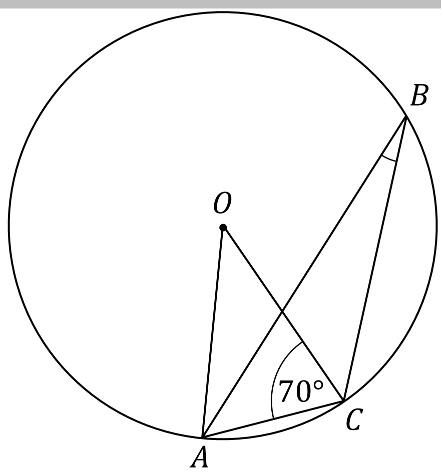
C. $\sin^4 \alpha + 1$

D. $\sin^2 \alpha \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 19. (0–1)

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku w punkcie O.
Kąt ACO ma miarę $70°$ (zobacz rysunek).



Miara kąta ostrego ABC jest równa

A. $10°$ **B.** $20°$ **C.** $35°$ **D.** $40°$

Zadanie 20. (0–1)

W rombie o boku długości $6\sqrt{2}$ kąt rozwarty ma miarę $150°$.
Iloczyn długości przekątnych tego rombu jest równy

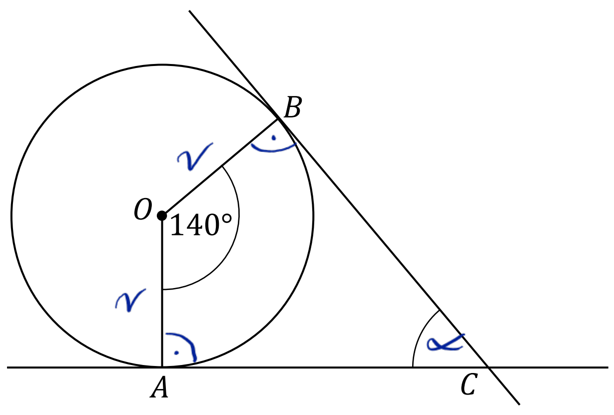
A. 24 **B.** 72 **C.** 36 **D.** $36\sqrt{2}$

Zadanie 21. (0–1)

Przez punkty A i B, leżące na okręgu o środku O, poprowadzono proste styczne do tego okręgu, przecinające się w punkcie C (zobacz rysunek).

$\alpha + 140° = 180°$

$\underline{\alpha = 40°}$



Miara kąta $\underset{\alpha}{ACB}$ jest równa

A. $20°$ **B.** $35°$ **C.** $40°$ **D.** $70°$

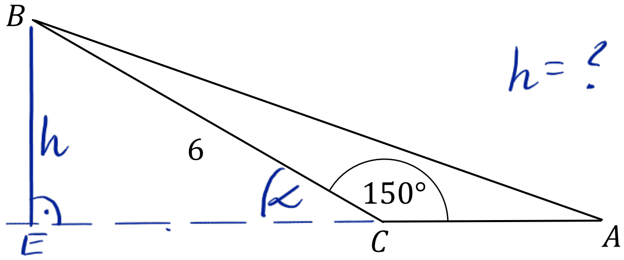
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 22. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = 6$. Miara kąta ACB jest równa $150°$ (zobacz rysunek).

① $\alpha = 30°$ → $\Delta\, 30°, 60°, 90$ ΔECB

② $h = 3$



Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka B jest równa

A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Zadanie 23. (0–1)

Dana jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest równoległa do prostej k i przechodzi przez punkt $P = (3, 5)$, gdy

A. $a = 3$ i $b = 4$.

B. $a = -\frac{1}{3}$ i $b = 4$.

C. $a = 3$ i $b = -4$.

D. $a = -\frac{1}{3}$ i $b = 6$.

Zadanie 24. (0–1)

Dane są punkty $K = (-3, -7)$ oraz $S = (5, 3)$. Punkt S jest środkiem odcinka KL. Wtedy punkt L ma współrzędne

A. $(13, 10)$

B. $(13, 13)$

C. $(1, -2)$

D. $(7, -1)$

$L(x, y)$
$K(-3, -7)$
$S_{KL} = S(5; 3) = \left(\frac{x-3}{2}; \frac{y-7}{2}\right)$
$\Downarrow$
$\underline{\underline{L(13; 13)}}$

Zadanie 25. (0–1) $f(x)$

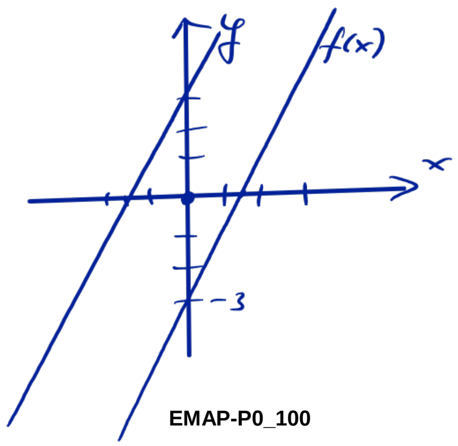
Dana jest prosta o równaniu $y = 2x - 3$. Obrazem tej prostej w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest prosta o równaniu

A. $y = 2x + 3$

B. $y = -2x - 3$

C. $y = -2x + 3$

D. $y = 2x - 3$



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 26. (0–1)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość 15. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Długość przekątnej tego graniastosłupa jest równa

A. $15\sqrt{2}$ **B.** 45 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** 10

Zadanie 27. (0–1)

Średnia arytmetyczna liczb x, y, z jest równa 4.

Średnia arytmetyczna czterech liczb: $1 + x, 2 + y, 3 + z, 14$, jest równa

A. 6 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 13

① $\frac{x+y+z}{3} = 4 \to x+y+z = 12$

② $\frac{x+y+z+1+2+3+14}{4} = \frac{12+20}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Zadanie 28. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry $0, 5, 7$ (np. $57\,075$, $55\,555$), jest

A. 5^3 **B.** $2 \cdot 4^3$ **C.** $2 \cdot 3^4$ **D.** 3^5

Zadanie 29. (0–1)

W pewnym ostrosłupie prawidłowym stosunek liczby W wszystkich wierzchołków do liczby K wszystkich krawędzi jest równy $\frac{W}{K} = \frac{3}{5}$.

Podstawą tego ostrosłupa jest

A. kwadrat.
B. pięciokąt foremny.
C. sześciokąt foremny.
D. siedmiokąt foremny.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż nierówność

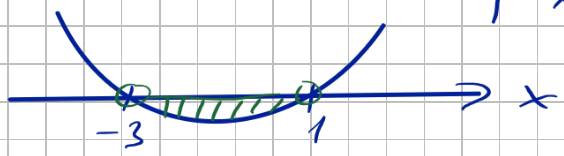
$$x(x-2) > 2x^2 - 3$$

$$x^2 - 2x - 2x^2 + 3 > 0$$

$$-x^2 - 2x + 3 > 0 \quad /:(-1)$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 = 4^2 \\ x_1 = \frac{-2-4}{2 \cdot 1} = -3 \; ; \quad x_2 = \frac{-2+4}{2 \cdot 1} = 1 \end{array}\right\}$$



Odp: $x \in (-3; 1)$

Zadanie 31. (0–2)

Pan Stanisław spłacił pożyczkę w wysokości 8910 zł w osiemnastu ratach. Każda kolejna rata była mniejsza od poprzedniej o 30 zł.
Oblicz kwotę pierwszej raty.

$S_n = 8910$ zł $= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

1 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_1 = ?$

$n = 18$ – ilość rat

$r = -30$ zł.

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

1 $\frac{2 \cdot a_1 + \overbrace{(18-1)}^{17} \cdot (-30)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{18}^{9} = 8910 \quad /:9$

$2a_1 - 510 = 990$

$2a_1 = 1500 \quad /:2$

$a_1 = 750$ zł

Odp: Pierwsza rata wynosiła 750 zł

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$$

Z: $x \neq 1 \wedge x, y \in \mathbb{R}$

T: $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$

D:
$$x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$$
$$x^2 + y^2 + 5 - 2x - 4y > 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) > 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$$

$$\begin{cases} \bigwedge_{x \neq 1} (x-1)^2 > 0 \\ \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} (y-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq 1}} (x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bigwedge_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq 1}} x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$$

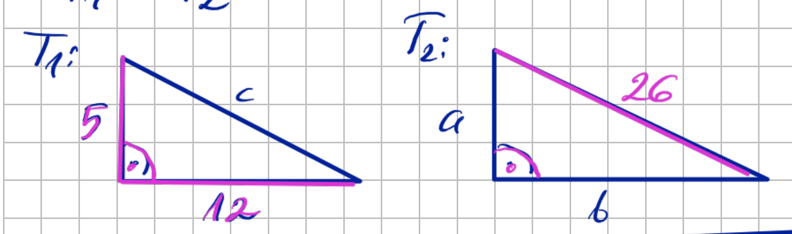
cnd.

Zadanie 33. (0–2)

Trójkąty prostokątne T_1 i T_2 są podobne. Przyprostokątne trójkąta T_1 mają długości 5 i 12. Przeciwprostokątna trójkąta T_2 ma długość 26.

Oblicz pole trójkąta T_2.

$T_1 \sim T_2$



$P_2 = ?$

① $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = \underline{30}$

② $c^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow c^2 = 169 \xrightarrow{c>0} \underline{c = 13}$

③ skala podobieństwa T_1 do T_2

$\underline{k} = \frac{c}{26} = \frac{13}{26} = \underline{\frac{1}{2}}$

④ $k^2 = \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{1}{4} = \frac{30}{P_2} \quad / \cdot 4P_2$

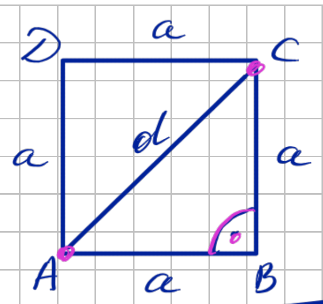
$\underline{\underline{P_2 = 120}}$

Odp: Pole Δ_2 wynosi $\underline{\underline{120}}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.	33.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 34. (0–2)

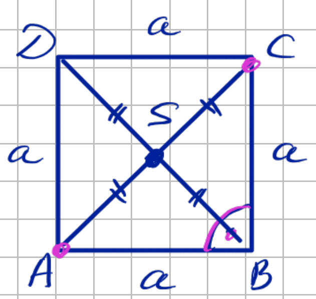
W kwadracie $ABCD$ punkty $A = (-8, -2)$ oraz $C = (0, 4)$ są końcami przekątnej. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego kwadratu.



$A(-8;-2)$

$C(0;4)$

$l_{BD}: y = ax + b$?



① l_{AC}:

$$\begin{cases} A: -8a_1 + b_1 = -2 \\ C: 0a_1 + b_1 = 4 \end{cases}$$

$-8a_1 + 4 = -2$

$-8a_1 = -6 \quad /:(-8)$

$a_1 = 3/4$

②

$S = S_{AC} = \left(\frac{-8+0}{2}; \frac{-2+4}{2}\right)$

$S = (-4; 1)$

③ $l_{BD} \perp l_{AC}$:

$a = -\frac{4}{3}$

$l_{BD}: y = -\frac{4}{3}x + b$

④ $S \in l_{BD}$:

$1 = -\frac{4}{3} \cdot (-4) + b$

$1 = \frac{16}{3} + b$

$b = -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}$

Odp: l_{BD}: $y = -\frac{4}{3}x - 4\frac{1}{3}$

Zadanie 35. (0–2)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.

$|Z| = n = 8$

$k = 2$

$K/, P \longrightarrow \overline{\overline{\Omega}} = n^k$

$P(A) = ?$

A - iloczyn liczb jest podzielny przez 15

① $\overline{\overline{\Omega}} = \underbrace{8}\cdot\underbrace{8} = 8^2 = \underline{64}$

② $\overline{\overline{A}} = \underbrace{3}_{3,6,9}\cdot\underbrace{1}_{5} \times 2 = 3\cdot 1 \times 2 = \underline{6}$

$\times 2$

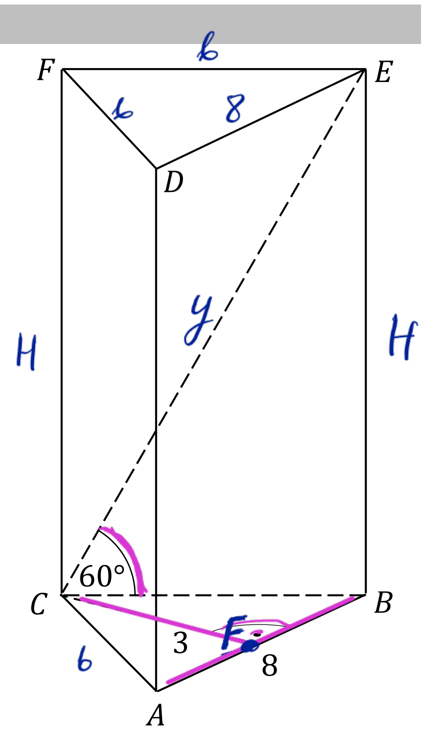
③ $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{6}{64} = \dfrac{3}{32}$

Odp: Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A wynosi $3/32$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.	35.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 36. (0–5)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 8$. Wysokość trójkąta ABC, poprowadzona z wierzchołka C, ma długość 3. Przekątna CE ściany bocznej tworzy z krawędzią CB podstawy ABC kąt $60°$ (zobacz rysunek).



$P_c = ?$
$V = ?$

$x = |FE|$
$y = |CE|$
$|AC| = |BC| = b$
$|AB| = 8$
$|CF| = 3$
$H = |CF| = |BE| = \ldots$

Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.

① ΔACF – Tw. Pit.: $b^2 = |AF|^2 + |CF|^2$
$b^2 = 4^2 + 3^2$
$b^2 = 25 \quad /\sqrt{\ }, \ b > 0$
$b = 5$

② $\Delta CBE\,(30°, 60°, 90°)$: $|BC| = b = \frac{1}{2}y \ \wedge \ H = b\sqrt{3}$
$y = 10 \ \wedge \ H = 5\sqrt{3}$

③ $P_c = 2 \cdot P_p + P_b = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 8 \cdot 3 + (2b + 8) \cdot H$
$= 24 + 18 \cdot 5\sqrt{3} = 24 + 90\sqrt{3}$

④ $V = P_p \cdot H = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

Odp: Pole całkowite graniastosłupa wynosi: $24 + 90\sqrt{3}$.
Objętość tego — // — — // — : $60\sqrt{3}$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	36.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

MATEMATYKA
Poziom podstawowy
Formuła 2015

MATEMATYKA
Poziom podstawowy
Formuła 2015

MATEMATYKA
Poziom podstawowy
Formuła 2015