ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. ***(1 pkt)***

Dla każdej dodatniej liczby a iloraz $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}}$ jest równy

A. $a^{-3,9}$ **B.** a^{-2} **C.** $a^{-1,3}$ **D.** $a^{1,3}$

Zadanie 2. ***(1 pkt)***

Liczba $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$ jest równa

A. $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3

Zadanie 3. ***(1 pkt)***

Liczby a i c są dodatnie. Liczba b stanowi 48% liczby a oraz 32% liczby c. Wynika stąd, że

A. $c=1,5a$ **B.** $c=1,6a$ **C.** $c=0,8a$ **D.** $c=0,16a$

Zadanie 4. ***(1 pkt)***

Równość $\left(2\sqrt{2}-a\right)^2=17-12\sqrt{2}$ jest prawdziwa dla

A. $a=3$ **B.** $a=1$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Zadanie 5. ***(1 pkt)***

Jedną z liczb, które spełniają nierówność $-x^5+x^3-x<-2$, jest

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -2

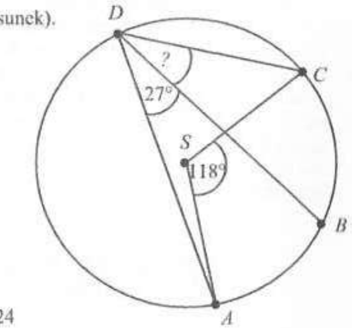
Zadanie 6. ***(1 pkt)***

Proste o równaniach $2x-3y=4$ i $5x-6y=7$ przecinają się w punkcie P. Stąd wynika, że

A. $P=(1,2)$ **B.** $P=(-1,2)$ **C.** $P=(-1,-2)$ **D.** $P=(1,-2)$

Zadanie 7. ***(1 pkt)***

Punkty $ABCD$ leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).
Miara kąta BDC jest równa



A. 91°

B. 72,5°

C. 18°

D. 32°

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 1 $a^{-2,6-1,3} = a^{-3,9}$

Zad. 2 $\log_{\sqrt2}(2\sqrt2) = \log_{\sqrt2}(\sqrt2)^3 = 3$

Zad. 3 $b = 0,48a \wedge b = 0,32c$

$0,48a = 0,32c \quad /:0,32$

$c = \frac{3}{2}a = 1,5a$

Zad. 4 $(2\sqrt2-a)^2 = 17-12\sqrt2$

$2\cdot 2\sqrt2 a = 12\sqrt2 \quad /:4\sqrt2$

$a = 3$

Zad. 5 $W(x) = -x^5+x^3-x$

$W(1) = -1+1-1 = 1 \not< -2$

$W(-1) = 1-1-1 = -1 \not< -2$

$W(2) = -2^5+\underbrace{2^3-2}_{6} = -2^5+6 < -2$

$\boxed{\text{bo: } -2^5 < -8 \quad -2^5 < -2^3}$

Zad. 6 $\begin{cases} 2x-3y=4 & /\cdot(-2) \\ 5x-6y=7 \end{cases}$

$+\begin{cases} -4x+6y=-8 \\ 5x-6y=7 \end{cases}$

$x = -1$

$2\cdot(-1)-3y=4$

$3y=-6$

$y=-2$

$(-1;-2)$

Zad. 7

$27°+x = \frac{1}{2}\cdot 118°$

$x = 32°$

Zadanie 8. *(1 pkt)*

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

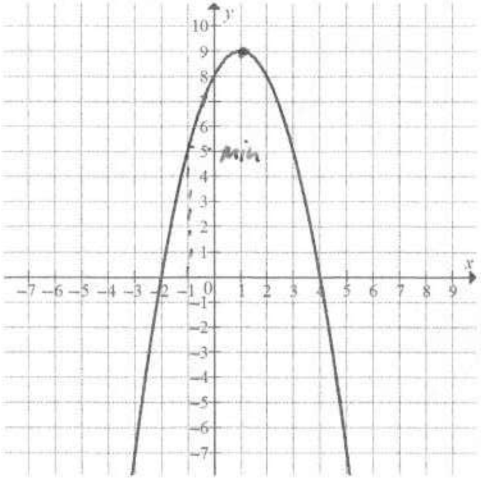
A. 8 B. 6 C. −6 D. −8

Zadanie 9. *(1 pkt)*

Równanie wymierne $\frac{3x-1}{x+5} = 3$, gdzie $x \neq -5$,

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.

Informacja do zadań 10. i 11.
Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 9)$. Liczby −2 i 4 to miejsca zerowe funkcji f.



Zadanie 10. *(1 pkt)*

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $(-\infty, -2\rangle$ B. $\langle -2, 4\rangle$ C. $\langle 4, +\infty)$ D. $(-\infty, 9\rangle$

Zadanie 11. *(1 pkt)*

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ jest równa

A. 2 B. 5 C. 8 D. 9

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 8 $x_0 = \frac{-6}{\frac{3}{4}} = \frac{-6\cdot 4}{3} = -8$

Zad. 9 $\frac{3x-1}{x+5} = \frac{3}{1} \wedge x \neq -5$

$3x - 1 = 3x + 15$
$-1 = 15$
sprzeczne. $\Rightarrow$ brak rozwiązań.

Zadanie 12. ***(1 pkt)***

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{2x^3}{x^6+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wtedy $f(-\sqrt[3]{3})$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Zadanie 13. ***(1 pkt)***

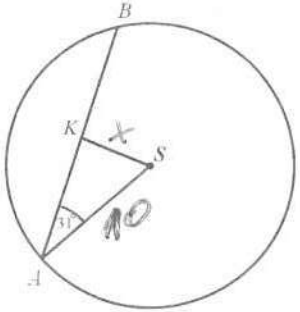
W okręgu o środku w punkcie S poprowadzono cięciwę AB, która utworzyła z promieniem AS kąt o mierze 31° (zobacz rysunek). Promień tego okręgu ma długość 10. Odległość punktu S od cięciwy AB jest liczbą z przedziału

A. $\left\langle\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right\rangle$ $= \left\langle\frac{45}{10};\frac{55}{10}\right\rangle$

B. $\left(\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right\rangle$

C. $\left(\frac{13}{2},\frac{19}{2}\right\rangle$

D. $\left(\frac{19}{2},\frac{37}{2}\right\rangle$



Zadanie 14. ***(1 pkt)***

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$ B. $-\frac{37}{2}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Zadanie 15. ***(1 pkt)***

Ciąg $(x, 2x+3, 4x+3)$ jest geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. -4 B. 1 C. 0 D. -1

Zadanie 16. ***(1 pkt)***

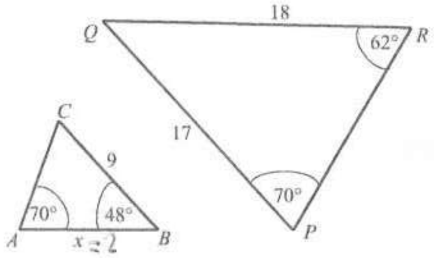
Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i PQR są podobne. Bok AB trójkąta ABC ma długość

A. 8

B. 8,5

C. 9,5

D. 10



BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zad. 12 $f(-\sqrt[3]{3}) = \frac{2\cdot(-\sqrt[3]{3})^3}{(-\sqrt[3]{3})^6+1} = \frac{2\cdot(-3)}{(-3)^2+1}$

$= \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$

Zad. 13

$\sin 31^\circ \approx 0{,}52$

$\frac{x}{10} = \frac{52}{100} \to x \approx \frac{52}{10} \approx 5{,}2$

$\frac{52}{10} \in \left\langle\frac{45}{10};\frac{55}{10}\right\rangle$

Zad. 14 $a_{14} = a_1 + 13r = 8 \wedge r = -\frac{3}{2}$

$a_1 - 13\cdot\frac{3}{2} = 8$

$a_1 = 8 + \frac{39}{2} = \frac{16}{2} + \frac{39}{2} = \frac{55}{2}$

$a_7 = a_1 + 6r = \frac{55}{2} + 6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{37}{2}$

Zad. 15 $(2x+3)^2 = x\cdot(4x+3)$

$\cancel{4x^2} + 12x + 9 = \cancel{4x^2} + 3x$

$9x = -9 \;/:9 \Rightarrow x = -1$

Zad. 16 $\frac{18}{17} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{9}\cdot 17}{\cancel{18}_{2}} = \frac{17}{2}$

$x = 8{,}5$

Zadanie 17. *(1 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{26}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

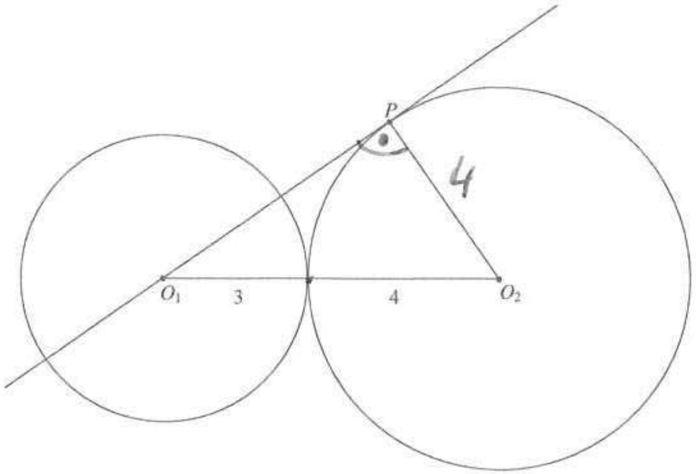
Zadanie 18. *(1 pkt)*

Z odcinków o długościach: 5, $2a+1$, $a-1$ można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

A. $a=6$ **B.** $a=4$ **C.** $a=3$ **D.** $a=2$

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie P przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek).



Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P, jest równe

A. 14 **B.** $2\sqrt{33}$ **C.** $4\sqrt{33}$ **D.** 12

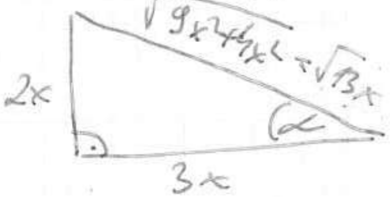
Zadanie 20. *(1 pkt)*

Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x + m - 2$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy

A. $m=2$ **B.** $m=\frac{1}{2}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=-2$

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

2 Tw. Pitagor.



Zad. 17 2 sp.

$\sin\alpha = \frac{2x}{\sqrt{13}x}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}}$

Zad. 18 $5 = 2a+1$ lub $5 = a-1$ lub $2a+1 = a-1$

$a = 2$ ✓ $a = 4$ $a = -2$

równe boki Δ: 5; 5; 1 ✓ ~~5; 9; 3~~ ✓ ~~5; −3; −3~~

to nie jest Δ   nie ma "−" boków

Zad. 19 $|O_1P|^2 + 4^2 = (3+4)^2$

$|O_1P|^2 = 49 - 16 \Rightarrow |O_1P| = \sqrt{33}$

$P_{\Delta O_1O_2P} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{33} = 2\sqrt{33}$

Zad. 20

$\frac{2}{m-1}\cdot m = -1$

$\frac{2m}{m-1} = \frac{-1}{1}$

$2m = -m + 1$

$3m = 1 \quad /:3$

$\boxed{m = \frac{1}{3}}$

Zadanie 21. *(1 pkt)*
W układzie współrzędnych dane są punkty $A=(a,6)$ oraz $B=(7,b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M=(3,4)$. Wynika stąd, że

A. $a=5$ i $b=5$ **B.** $a=-1$ i $b=2$ **C.** $a=4$ i $b=10$ **D.** $a=-4$ i $b=-2$

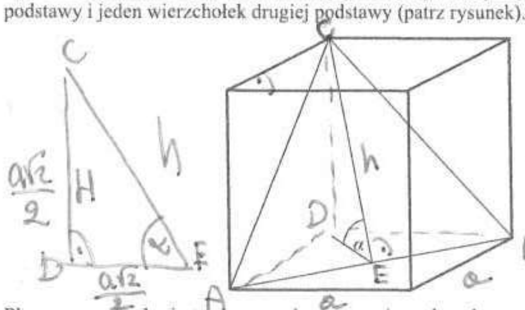
Zadanie 22. *(1 pkt)*
Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w tych trzech rzutach. Wtedy

A. $0\le p<0{,}2$ **B.** $0{,}2\le p\le 0{,}35$ **C.** $0{,}35<p\le 0{,}5$ **D.** $0{,}5<p\le 1$

Zadanie 23. *(1 pkt)*
Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120°, a tworząca tego stożka ma długość 4. Objętość tego stożka jest równa

A. 36π **B.** 18π **C.** 24π **D.** 8π

Zadanie 24. *(1 pkt)*
Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od wysokości graniastosłupa. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek drugiej podstawy (patrz rysunek).



$H = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą graniastosłupa kąt α o mierze

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Zadanie 25. *(1 pkt)*
Średnia arytmetyczna sześciu liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, x, jest równa $\frac{x}{2}$. Mediana tych liczb jest równa

A. 26 **B.** 27 **C.** 28 **D.** 29

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 21 $\frac{a+7}{2} = 3 \wedge \frac{6+b}{2} = 4$

$a+7=6$ $6+b=8$

$a=-1$ $b=2$

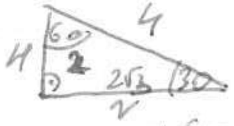
Zad. 22 $\overline{\Omega} = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$

$\overline{A} = \frac{1}{O}\,\frac{1}{O}\,\frac{1}{R}\ (\times 3) = 3$

lub drzewkiem

$P(A) = \frac{3}{8} = p = 0{,}375$

Zad. 23



$H=2$
$r=2\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2\cdot 2$

$V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot 3\cdot 2$

$V = 8\pi$

Zad. 24

$|DE| = |DC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

więc $\alpha = 45^\circ$

Zad. 25 $\frac{31+16+25+29+27+x}{6} = \frac{x}{2}$

$\frac{128+x}{6} = \frac{x}{2} \quad /\cdot 6$

$128+x = 3x \Rightarrow 2x = 128$

$x = 64$

$(16;\ 25;\ 27;\ 29;\ 31;\ 64) \Rightarrow Me = \frac{27+29}{2} = 28$

STARA MATURA

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 26. do 34. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

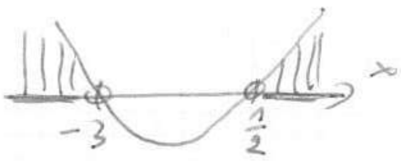
Zadanie 26. *(2 pkt)* (INNE W NOWEJ MATURZE JEST)

Rozwiąż nierówność $2x^2+5x-3>0$.

$\Delta = 49$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -3$



Odp: $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

Odpowiedź: ....

Zadanie 26. (0–2) NOWA MATURA.

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

① ŚREDNIA ARYTMETYCZNA:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 10 + 2\cdot 7 + 2\cdot 8}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

$$\bar{x} = 8\frac{1}{3}\ cm \approx \underline{8\ cm}$$

② BŁĄD WZGLĘDNY:

$$\delta = \frac{|8\frac{1}{3} - 8|}{8\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\delta\,[\%] = \frac{1}{25}\cdot 100\% = \underline{4\%}$$

Odp: średni roczny przyrost wysokości sosny w okresie badanych 6-ciu lat wynosi około 8 cm.
Błąd względny przybliżenia

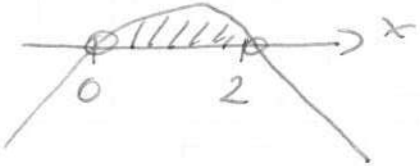
Odpowiedź: .... wynosi 4%.

Zadanie 27. (0–2) NOWA MATURA.

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x>3x^2-6x$.

$$-x^2+2x>0$$

$$-x(x-2)>0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$



$x\in(0;2)$

Odpowiedź: $x\in(0;2)$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

MMA_1P

Zadanie 27. (2 pkt) (STARA MATURA)

Rozwiąż równanie $x^3+3x^2+2x+6=0$.

$$(x^3+3x^2)+(2x+6)=0$$

$$x^2(x+3)+2(x+3)=0$$

$$(x+3)(x^2+2)=0$$

$$x+3=0 \lor x^2+2=0$$

$$x=-3 \lor x^2=-2$$

sprzeczne.

Odp: $x=-3$.

Odpowiedź: ...

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

MMA_1P

Zadanie 28. *(2 pkt)* (STARA MAT.)

Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

$\Downarrow$

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{3}{2}$

$\to$ „$=1$" $\swarrow$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}$

$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\quad /:2$

odp.: $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$

Odpowiedź: ....

MMA_1P

Zadanie 28. (0–2) NOWA MATURA

Rozwiąż równanie $(4-x)(x^2+2x-15)=0$.

$4-x=0 \lor x^2+2x-15=0$

$x_1=4$ $\qquad \Delta=64;\ \sqrt{\Delta}=8$

$x_2=-5;\ x_3=3$

$x=\{-5;3;4\}$.

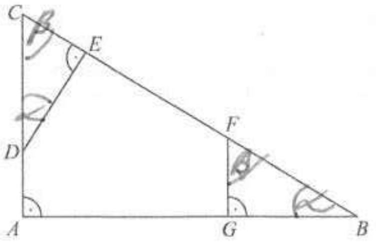
Odpowiedź: $x\in\{-5;3;4\}$

MMA_1P

Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na przyprostokątnych AC i AB tego trójkąta obrano odpowiednio punkty D i G. Na przeciwprostokątnej BC wyznaczono punkty E i F takie, że $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BGF| = 90^\circ$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG.

Założenie!



TEZA! $\triangle_{CDE} \sim \triangle_{FBG}$

DOWÓD

(1) $\alpha + \beta = 90^\circ$ w $\triangle ABC$ (prostokątnym)

(2) $\triangle FBG$: $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle GBF| = \alpha$

$|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$

więc $|\sphericalangle GFB| = \beta$

(3) $\triangle CDE$:

$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \beta$

$|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$

więc $|\sphericalangle CDE| = \alpha$

(4) $\triangle CDE \sim \triangle FBG$ z własności kąt, kąt, kąt $(\alpha; \beta; 90^\circ)$. cnd.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \ge 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Z: $a_n = 2n^2 + 2n$

$n \ge 1$

$n, k \in N$

T: $a_n + a_{n+1} \overset{?}{=} k^2$

Rozw. (Dowód.)

$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$

$= 2n^2 + 2n + 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2$

$= 2n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2$

$= 4n^2 + 8n + 4 =$

$= 4(n^2 + 2n + 1) =$

$= 2^2 (n+1)^2 =$

$= [\underbrace{2(n+1)}_{\in N}]^2 = k^2$

cnd.

Zadanie 31. (0–2) (NOWA MATURA)

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Dane:

SIŁA TRZĘSIENIA: $\boxed{R=\log\frac{A}{A_0}}$

A – amplituda [cm]

$A_0=10^{-4}$ [cm]

Rozwiązanie:

$$6{,}2=\log\frac{A}{10^{-4}}$$

$$6{,}2=\log A-\log 10^{-4}$$

$$6{,}2=\log A-(-4)$$

$$6{,}2=\log A+4$$

$$\log A=2{,}2$$

$$\boxed{A=10^{2,2}}$$

$$A=10^{2,2}\text{ cm}>10^2\text{ cm}$$

$$A>100\text{ cm.}$$

Odpowiedź: Amplituda trzęsienia ...wynosiła $10^{2,2}$ cm i była większa od 100 cm.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 31. (2 pkt) (STARA MATURA)

W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz a_1 jest równy 7 oraz ostatni wyraz a_n jest równy 89. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2016.

Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$$

$$a_1=7$$

$$a_n=89$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=2016$$

n = ile = ?

$$\Downarrow$$

$$\frac{7+89}{2}\cdot n=2016$$

$$48n=2016\quad /:48$$

$$n=42$$

Odpowiedź: Ciąg a_n ma 42 wyrazy.

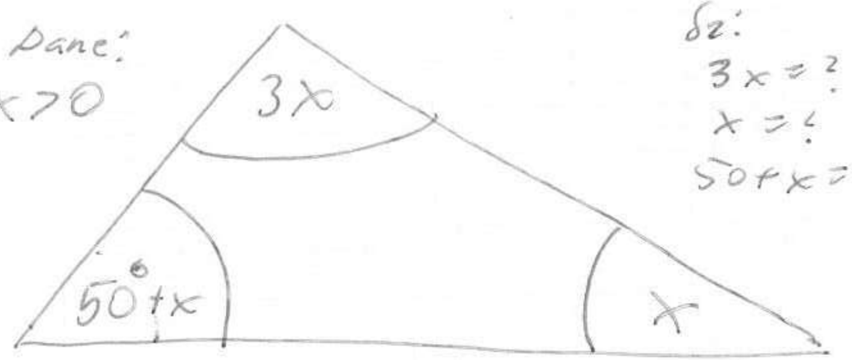
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o $50°$. Oblicz kąty tego trójkąta.

Dane:
$x > 0$

Sz:
$3x = ?$
$x = ?$
$50 + x = ?$



Rozwiązanie

$$3x + (50° + x) + x = 180°$$
$$3x + 50° + x + x = 180°$$
$$5x = 130° \quad /:5$$
$$x = \frac{130°}{5} = 26°$$
$$x + 50° = 76°$$
$$3x = 78°$$

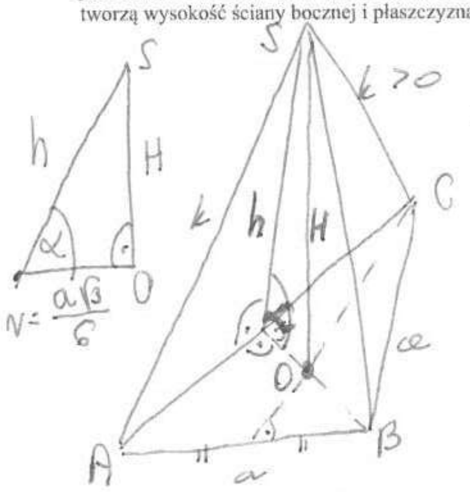
Odp: KĄTY △ wynoszą: 26°, 76°, 78°

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 33. (0–5) NOWA MATURA.

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.



Dane:

$a = |AB| = |BC| = |AC| > 0$

$H = |SO| = \frac{a\sqrt{3}}{2} > 0$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 27$

$k = |AS| = |BS| = |CS|$

Szukane:

$P_b = ?$

$\cos\alpha = ?$

Rozwiązanie:

(1) $\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cancel{\sqrt{3}}}{2} = 27 \quad /\cdot 8$

$a^3 = 27 \cdot 8 \quad /\sqrt[3]{\ }$

$\boxed{a = 6}$

(2) $h^2 = r^2 + H^2$

$h^2 = \frac{\cancel{3}a^2}{\cancel{36}_{12}} + \frac{3a^2 \cdot 3}{4 \cdot 3}$

$h^2 = \frac{10a^2}{12} = \frac{5a^2}{6}$

$\boxed{h = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}}$

(3) $P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h$

$P_b = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{3} \cdot \sqrt{30}$

$\underline{P_b = 9\sqrt{30}\ cm^2}$

(4) $\cos\alpha = \frac{r}{h} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{a\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{18}}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{10}}{\cancel{6}_2 \cdot 5}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}}$

Odp: $P_b = 9 \cdot \sqrt{30}\ cm^2$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Zadanie 33. (5 pkt) (STARA MAT.)

Grupa znajomych wyjeżdżających na biwak wynajęła bus. Koszt wynajęcia busa jest równy 960 złotych i tę kwotę rozłożono po równo pomiędzy uczestników wyjazdu. Do grupy wyjeżdżających dołączyło w ostatniej chwili dwóch znajomych. Wtedy koszt wyjazdu przypadający na jednego uczestnika zmniejszył się o 16 złotych. Oblicz, ile osób wyjechało na biwak.

960 zł – koszt wynajęcia busa

$0 < n$ – planowana ilość uczestników

$\frac{960}{n}$ – planowana cena od 1 osoby

$\frac{960}{n+2} = \frac{960}{n} - 16 \quad /:16$

$\frac{60}{n+2} = \frac{60}{n} - 1 \quad /\cdot n(n+2)$

$60n = 60(n+2) - n(n+2)$

$\cancel{60n} = \cancel{60n} + 120 - n^2 - 2n$

$n^2 + 2n - 120 = 0$

$\Delta_n = 484 \quad ; \quad \sqrt{\Delta} = 22$

$n = -12 \quad \vee \quad \underline{n = 10}$

sprzeczne z zał. zadania.

$\boxed{n + 2 = 12}$

Odp: Na biwak wyjechało 12 osób.